

# QUADRO DI RIFERIMENTO DI MATEMATICA

## INDICE

<i>Presentazione</i>	<i>p. 2</i>
<i>1. La competenza matematica</i>	<i>p. 3</i>
<i>2. I contenuti matematici</i>	<i>p. 4</i>
<i>2.1 I Nuclei tematici</i>	<i>p. 4</i>
<i>2.2. Ambito di valutazione</i>	<i>p. 4</i>
<i>3. I processi cognitivi</i>	<i>p. 6</i>
<i>4. Caratteristiche generali delle prove e criteri di formulazione dei quesiti</i>	<i>p. 6</i>
<i>4.1. Tipi di quesiti</i>	<i>p. 6</i>
<i>4.2 Criteri di formulazione dei quesiti</i>	<i>p. 7</i>

## QUADRO DI RIFERIMENTO DI MATEMATICA PER LA COSTRUZIONE DELLE PROVE DI VALUTAZIONE INVALSI (PRIMO CICLO)

### PRESENTAZIONE

Il Quadro di Riferimento (QdR) per le prove di valutazione dell'INVALSI di matematica presenta le idee chiave che guidano la progettazione delle prove, per quanto riguarda:

- a) gli ambiti della valutazione, cioè *quali aspetti* della matematica del primo ciclo della scuola si valutano, e la scelta degli argomenti oggetto della valutazione
- b) i modi della valutazione, ossia le caratteristiche degli strumenti di valutazione e i criteri seguiti nella costruzione delle prove.

Il Quadro di Riferimento (QdR) è definito *in corrispondenza con le finalità generali dell'INVALSI, che riguardano la valutazione di sistema di istruzione*, ossia una valutazione dell'efficacia e dell'efficienza del sistema scolastico, globalmente inteso, a livello nazionale e per singoli settori o singole istituzioni scolastiche.

### *A chi si rivolge*

Il QdR serve in primo luogo alle persone incaricate di redigere i quesiti e al gruppo di lavoro che deve comporre i fascicoli: indica i vari aspetti dell'apprendimento da valutare e stabilisce un equilibrio tra le varie aree disciplinari. È quindi uno strumento di lavoro fondamentale nella fase preparatoria di produzione dei questionari.

Il QdR può servire agli insegnanti per *interpretare i risultati* delle prove INVALSI in quanto confronto tra le indicazioni nazionali, il curricolo effettivo e quello raggiunto anche allo scopo di valutare i risultati delle proprie classi o della propria istituzione scolastica: la comparazione dei propri risultati con gli esiti complessivi delle prove può servire per individuare i punti di forza e di debolezza del percorso effettivamente realizzato in classe e delle metodologie scelte; può inoltre aiutare il coordinamento all'interno delle singole istituzioni scolastiche.

Trattandosi di una valutazione che adopera gli strumenti statistici riguardo all'intera popolazione studentesca, essa può costituire un ottimo termine di confronto per le singole scuole o anche per i singoli insegnanti, allo scopo di condurre una riflessione autonoma sia sulle abilità e conoscenze acquisite dagli alunni (curricolo raggiunto), sia sulla validità delle scelte didattiche effettuate, sulla efficacia dell'offerta formativa programmata e infine sulla ampiezza, profondità e coerenza del curriculum effettivamente svolto (curricolo effettivo).

Il QdR può essere adoperato dai responsabili del sistema (Ministero dell'Istruzione, Uffici Scolastici Regionali, Dirigenti scolastici) come un insieme di indicazioni per la lettura corretta dei risultati delle prove valutative nei diversi segmenti scolastici esaminati e poter adottare opportune ed efficaci strategie di intervento, ad esempio relativamente alla predisposizione di piani di formazione in servizio dei docenti.

Il QdR, infine, può offrire alle famiglie informazioni utili per capire il significato della valutazione come momento cruciale di verifica del sistema scolastico.

Tutte queste osservazioni portano a riflettere sull'importante effetto di *ricaduta* che il complesso delle *prove INVALSI* ha sull'intero sistema scolastico e sulle sue scelte didattiche. È proprio in questo senso, come si è detto, che una attenta analisi dei risultati delle prove somministrate potrà contribuire a fornire una guida per il miglioramento dell'insegnamento. Sarebbe al contrario un danno per l'insegnamento e la Scuola se la prospettiva di queste prove dovesse tradursi nella preoccupazione di addestrare gli allievi ad affrontare tipologie valutative simili, limitandosi ad imitarne la forma nelle prove di verifica svolte in classe nel corso dell'anno, senza invece curare la effettiva crescita di quel retroterra cognitivo e culturale di cui le *prove INVALSI* dovrebbero, al contrario, rilevare e valutare l'esistenza, per stimolarne poi lo sviluppo e la crescita.

## *1 La competenza matematica*

L'apprendimento della matematica è una componente fondamentale nell'educazione e la crescita della persona, secondo un punto di vista che ha origini lontane e che è oggi universalmente condiviso. Nel contempo, nella società attuale la matematica è nel cuore del trattamento quantitativo dell'informazione nella scienza, nella tecnologia e nelle attività economiche e nel lavoro, e quindi la competenza matematica è un fattore fondamentale nella consapevolezza del futuro cittadino e consumatore e nella sua riuscita nel mondo professionale<sup>1</sup>. Interessa perciò sondare se le conoscenze che la scuola, ai diversi livelli, stimola e trasmette, sono ben ancorate ad un insieme di concetti fondamentali di base e di conoscenze stabili, almeno sui livelli essenziali. Si vuole in primo luogo valutare la conoscenza della disciplina matematica e dei suoi strumenti, intendendo tale disciplina come conoscenza concettuale, frutto cioè di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento "meccanico" o di apprendimento mnemonico. Una conoscenza concettuale quindi, che affondi le sue radici in contesti critici di razionalizzazione della realtà, senza richiedere eccessi di astrazione e di formalismo. La formalizzazione matematica dovrebbe infatti essere acquisita a partire dalla sua necessità ed efficacia nell'esprimere ed usare il pensiero matematico. Gli aspetti algoritmici applicativi ed esecutivi, che pure costituiscono una componente irrinunciabile della disciplina matematica, non dovrebbero essere considerati fine a se stessi.

Visti gli obiettivi generali che sono attribuiti all'insegnamento della matematica dalle disposizioni di legge, ma più in generale dalla nostra società, nel solco di una visione della matematica profondamente radicata nella cultura, le prove INVALSI non devono limitarsi a valutare l'apprendimento della *matematica utile*, ma devono cercare di far riferimento alla matematica come *strumento di pensiero* e alla matematica come *disciplina con un proprio specifico statuto epistemologico*. Le prove INVALSI di matematica per il primo ciclo scolastico sono volte a valutare le conoscenze e le abilità matematiche acquisite dagli studenti in entrata e in uscita del ciclo d'istruzione (classe II della scuola primaria; classe V della scuola primaria; classe I della scuola secondaria di primo grado; classe III della scuola secondaria di I° grado). Tali prove consistono di quesiti costruiti in relazioni a due dimensioni<sup>2</sup>:

- I. *i contenuti matematici*: divisi per grandi blocchi o nuclei: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Misure dati e previsioni;
- II. *i processi cognitivi* coinvolti nel lavoro matematico e nella risoluzione di problemi.

---

1 Questo aspetto è predominante nell'indagine *Programme for International Student Assessment (PISA)* dell'Organizzazione per la cooperazione e lo sviluppo economico (OCSE) che riguarda i quindicenni: "PISA assesses how far students near the end of compulsory education have acquired some of the knowledge and skills that are essential for full participation in society. In all cycles, the domains of reading, mathematical and scientific literacy are covered not merely in terms of mastery of the school curriculum, but in terms of important knowledge and skills needed in adult life". ("What PISA assess", <http://www.pisa.oecd.org/>)

2 In modo simile queste due direzioni sono state analizzate nel quadro di riferimento delle prove di valutazione di TIMSS per quanto riguarda il 4° anno e l'8° anno della scuola di primo ciclo: sono il *contents domain*, diviso in grandi blocchi della matematica elementare, e il *cognitive domain*, diviso nei tre blocchi di conoscere, applicare, ragionare (si veda *TIMSS 2007 Assessment Frameworks*, TIMSS&PIRLS International Study Center (Lynch School of Education, Boston College), Chestnut Hill, MA, 2005 (si può consultare il documento completo nel sito <http://timss.bc.edu>). Questa analisi dettagliata è un utile riferimento a livello internazionale per la costruzione delle prove di valutazione in matematica.

## 2. I contenuti matematici

### 2.1. I Nuclei tematici

La divisione dei contenuti in grossi blocchi è ormai condivisa a livello internazionale; è però interessante un confronto fra le scelte operate dall'Italia a partire dai Curricoli UMI-CIIM<sup>3</sup> e essenzialmente confermate nei documenti programmatici (dalle Indicazioni Nazionali<sup>4</sup> alle Indicazioni per il Curricolo<sup>5</sup>) e le scelte operate a livello internazionale (OCSE-PISA<sup>6</sup>, TIMSS 2007 e NCTM 2000<sup>7</sup>)

<b>Indicazioni Nazionali e Indicazioni per il curriculum</b>	<b>OCSE-PISA 2006 Overarching ideas (idee chiave)</b>	<b>TIMSS 2007 Content domains (domini di contenuto)</b>	<b>NCTM Standards 2000 Contents (contenuti)</b>
NUMERI	QUANTITA'	NUMERO	NUMERI E OPERAZIONI
SPAZIO E FIGURE	SPAZIO E FORMA	GEOMETRIA	GEOMETRIA
RELAZIONI E FUNZIONI	CAMBIAMENTI E RELAZIONI	ALGEBRA	ALGEBRA
MISURE, DATI E PREVISIONI	INCERTEZZA	DATI E CASO	ANALISI DEI DATI E PROBABILITA'

"Si noti la scelta italiana di utilizzare come titoli dei temi i nomi di *oggetti* matematici e non di *teorie*, e cioè *numeri* anziché *aritmetica*, *spazio e figure* anziché *geometria*, *relazioni e funzioni* anziché *algebra*, *dati e previsioni* anziché *statistica e probabilità*. Questa scelta tende a valorizzare nel primo ciclo gli oggetti con cui gli alunni devono fare esperienza, rispetto alla sistemazione teorica, che peraltro non deve essere tralasciata" (Anzellotti & Cotoneschi, 2007)<sup>8</sup>.

La scelta di OCSE-PISA riguarda le *idee chiave* (*overarching ideas*) che rappresentano i diversi modi di leggere e interpretare la realtà secondo un determinato quadro teorico di riferimento nel quale la matematica è vista essenzialmente come strumento per descrivere, leggere e interpretare la realtà. Per TIMSS 2007 e NCTM 2000 la scelta è mista come si evince dalla tabella sopra riportata.

### 2.2. Ambito di valutazione

Diamo di seguito un elenco dei possibili oggetti della valutazione (senza pretesa di esaustività) ritenuti particolarmente significativi per valutare la competenza matematica nel primo ciclo.

<sup>3</sup> Commissione Italiana Insegnamento della matematica, insieme a SIS (Società Italiana di Statistica e Matthesis all'interno di un protocollo di intesa con il MIUR ha prodotto tre volumi *Matematica 2001, 2003 e 2004 "La matematica per il cittadino"* scaricabili all'indirizzo <http://www.dm.unibo.it/umi/italiano/Matematica2001/matematica2001.html>

<sup>4</sup> Legge 53/2003 e D.Lgs. 59/2004

<sup>5</sup> Decreto Ministeriale 31 luglio 2007

<sup>6</sup> OECD, MIUR, INVALSI, (2007) *Valutare le competenze in scienze, lettura e matematica*, Armando Editore

<sup>7</sup> NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) che ha prodotto nel 2000 i *Principles and Standards for School Mathematics* (U.S.A.) si veda il sito <http://standards.nctm.org/>

<sup>8</sup> Anzellotti, G., Cotoneschi S., (2007), *Matematica*, in "Le indicazioni per il curriculum: la parola alla scuola", *Notizie della scuola*, 2/3, Anno XXXV, Tecnodid Editrice

AMBITO DI CONTENUTO	OGGETTI DI VALUTAZIONE
<b>NUMERI</b>	Numeri naturali e loro rappresentazione in base dieci. Addizione e sottrazione fra numeri naturali. Moltiplicazione e divisione fra numeri naturali. Numeri decimali e frazioni. Frazioni equivalenti. Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali. Operazioni fra numeri decimali. Proprietà delle operazioni. Significato delle parentesi in sequenze di operazioni. Proprietà dei numeri naturali: precedente successivo, pari dispari, doppio, metà...). Operazioni con i numeri interi. Calcolo approssimato. Potenze di numeri naturali e interi. Numeri primi. Multipli e divisori. Rapporti, percentuali e proporzioni. Numeri decimali limitati e illimitati periodici (rappresentazione decimale e frazionaria). Numeri razionali. Operazioni con i numeri razionali. Numeri decimali non periodici.
<b>SPAZIO E FIGURE</b>	Mappe, piantine e orientamento. Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Semplici figure dello spazio e del piano (cubo, sfera, triangolo, quadrato...). I principali enti geometrici. Angoli e loro ampiezza. Rette incidenti, parallele e perpendicolari. Verticalità, orizzontalità. Uguaglianza di figure. Equivalenza fra figure. Composizione e scomposizione di figure. Elementi di semplici figure dello spazio (vertici, spigoli, ...). Unità di misure di lunghezze, aree e volumi. Perimetro di poligoni. Aree di poligoni. Somma degli angoli di un triangolo e di poligoni. Teorema di Pitagora. Traslazioni, rotazioni e simmetrie. Riproduzioni in scala: ampliamenti e riduzioni. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Angoli al centro e angoli alla circonferenza. Aree e volumi dei principali solidi. Rappresentazione piana di figure solide. Sistema di riferimento cartesiano. Rappresentazione sul piano cartesiano di figure piane e di trasformazioni geometriche.
<b>RELAZIONI E FUNZIONI (*)</b>	Classificazione di oggetti, figure, numeri in base a una determinata proprietà. Equivalenze e ordinamenti. Grandezze direttamente e inversamente proporzionali Ricerca di regolarità in sequenze di numeri, figure, simboli e parole. Generalizzazione di regolarità attraverso parole e espressioni algebriche. Funzioni del tipo $y=ax$ , $y=a/x$ e $y=x^2$ e loro rappresentazione grafica. Rappresentazione di funzioni attraverso parole, tabelle, grafici, espressioni algebriche. Equazioni di primo grado. Rappresentazione di fatti e fenomeni attraverso tabelle, grafici ed espressioni algebriche.

<b>MISURA, DATI E PREVISIONI</b>	<p>Il collettivo statistico e i suoi elementi. Prime rappresentazioni di dati (tabelle, pittogrammi, grafici a barre, ecc.). Caratteri qualitativi e quantitativi. Moda, mediana e media aritmetica. Istogrammi. Calcolo di frequenze relative e percentuali. Diagrammi di vario tipo. Evento certo, possibile e impossibile. Campione estratto da una popolazione: casuale e non casuale. Probabilità di un evento: valutazione della probabilità di eventi elementari ed equiprobabili. Semplici valutazioni di probabilità di un evento a partire da dati statistici.</p> <p>Misure di grandezze discrete per conteggio. Misure di grandezze continue attraverso oggetti e strumenti. Il Sistema Internazionale di misura. Stime e approssimazioni. Notazione scientifica</p>
----------------------------------	--

(\*) Il Nucleo *Relazioni e funzioni* sarà valutato a partire dalla classe V della scuola primaria

### 3. I processi cognitivi

Per i compiti di valutazione, anche secondo direzioni coerenti con *frameworks* internazionali come ad esempio la rilevazione TIMSS 2007 ma sempre tenendo presente la nostra tradizione culturale, distinguiamo alcune sotto-competenze che possono essere valutate attraverso le prove INVALSI e di cui si deve tener conto nella costruzione delle prove:

- i. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*)
- ii. conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)
- iii. conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (*verbale, scritta, simbolica, grafica, ...*)
- iv. sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (*individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...*)
- v. sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (*saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...*)
- vi. acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...*)
- vii. utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (*descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...*)

### 4. Caratteristiche generali delle prove e criteri di formulazione dei quesiti

#### 4.1. Tipi di quesiti

Le prove INVALSI di matematica potranno essere costituite da quesiti di due diverse categorie: a “risposta chiusa” e a “risposta falsa-aperta”.

I quesiti a risposta chiusa sono domande con risposta a scelta multipla che presentano diverse possibili risposte secondo quanto è richiesto dalla natura del quesito. Una sola delle risposte che proposte è corretta.

Per quesiti a cosiddetta “risposta falsa-aperta” o a risposta “univoca” si intendono domande che richiedono allo studente semplici risposte (come ad esempio il risultato di un calcolo algebrico o numerico oppure ancora l’adesione o la negazione di determinate affermazioni) che sono perciò suscettibili di una valutazione rapida e sicura.

In alcuni dei quesiti si potrà richiedere una breve argomentazione, la spiegazione del percorso seguito per la risoluzione o la giustificazione di alcune affermazioni.

#### 4.2. Criteri di formulazione dei quesiti

Gli estensori dei quesiti cercheranno di attenersi ai seguenti criteri:

- a) I quesiti potranno (e possibilmente dovranno) essere formulati impiegando diversi registri: testi, figure, immagini, tabelle, grafici.
- b) I quesiti non saranno formulati necessariamente legati all'idea di *contenuto minimo* o *irrinunciabile*.
- c) I quesiti possono essere formulati, soprattutto per la seconda classe della scuola primaria, in un contesto che li collega a situazioni concrete; potranno via via sempre più essere formulati con riguardo alla matematica *per sé*.
- d) La formulazione dei quesiti eviterà espressioni vaghe, ambigue o inutilmente complicate (ad esempio l'uso della doppia negazione o domande con formulazione negativa).
- e) Si eviterà di proporre i quesiti più complessi all'inizio della prova.
- f) La lunghezza e possibilmente la struttura delle risposte di un singolo quesito dovranno essere omogenei.
- g) Nel caso di utilizzo di definizioni su cui non vi sia completo accordo nei libri di testo e in generale nella prassi scolastica, la definizione da utilizzare sarà richiamata nel testo del quesito.
- h) Sarà richiamato esplicitamente, ogni volta che sarà opportuno, il significato dei simboli; si cercherà di non utilizzare simboli non standard.
- i) I grafici e le tabelle saranno corredati da tutti gli elementi (etichette, legende,...) necessari per interpretarli e per contestualizzarli; se lo si riterrà opportuno, questi elementi potranno essere presenti anche quando non saranno strettamente necessari per rispondere al quesito.
- j) Quando in una figura geometrica o in una immagine due elementi sono congruenti, questo sarà indicato esplicitamente (nel testo o con un'adeguata e chiara simbologia sulla figura).